

Objectif :

Définir, décrire et calculer la vitesse ou l'accélération d'un point d'un solide.

## CINEMATIQUE C2

### Vitesse et accélération

#### 1. Vitesse

##### 1.1. Notion de vitesse

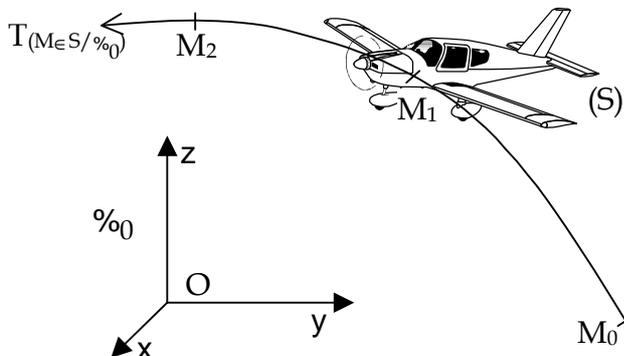
Soit (S) un solide en mouvement dans un repère  $R_0$ .

Soit M un point appartenant au solide (S), de coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  à l'instant t.

Soit  $T(M \in S / R_0)$  la trajectoire de M.

Sur cette trajectoire, choisissons par convention :

- une origine  $M_0$  ;
- un sens positif ;
- une unité de longueur.



On relève, aux instants  $t_0, t_1, t_2$ , les positions du point M appartenant à S dans le repère  $R_0$ .

Instants	$t_0$	$t_1$	$t_2$
Position sur $T(M \in S / R_0)$	$M_0$	$M_1$	$M_2$
Abscisse curviligne $s = f(t)$	$s_0 = 0$	$s_1 = M_0M_1$	$s_2 = M_0M_2$

$\overline{S} = \text{arc } M_0M = \text{valeur algébrique, à l'instant t, de l'arc orienté } M_0M$

##### 1.2. Vitesse algébrique moyenne

Entre  $t_1$  et  $t_2$  :

$$V_{(t_1 \rightarrow t_2)_{\text{moy}}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

##### 1.3. Vitesse algébrique instantanée

Si  $t_2$  est très proche de  $t_1$ , alors  $\Delta t$  devient infiniment petit.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) \text{ (dérivée de l'abscisse curviligne)}$$

##### 1.4. Vecteur vitesse instantanée

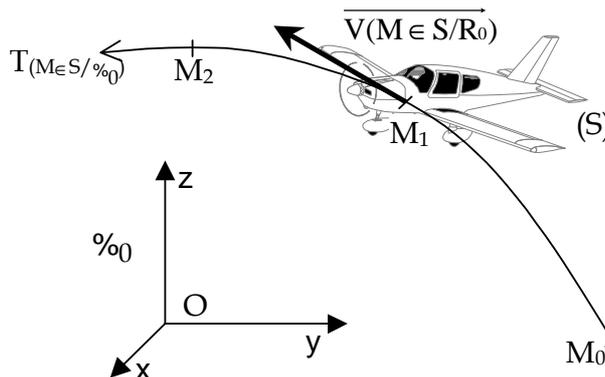
Le vecteur vitesse du point M dans son mouvement par rapport au repère fixe  $R_0$ , est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur position, dans le repère  $R_0$ .

$$\overrightarrow{V(M \in S / R_0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V(M \in S / R_0)} = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{V(M \in S / R_0)}$  est tel que :

- son origine est confondue avec la position de M à l'instant t ;
- il est toujours tangent en M à la trajectoire  $T(M \in S / R_0)$  ;
- il est orienté dans le sens du mouvement ;
- sa norme est  $\left\| \overrightarrow{V(M \in S / R_0)} \right\| = |v| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$  ;
- unité : mètre par seconde, ou m/s.



Autre expression possible :

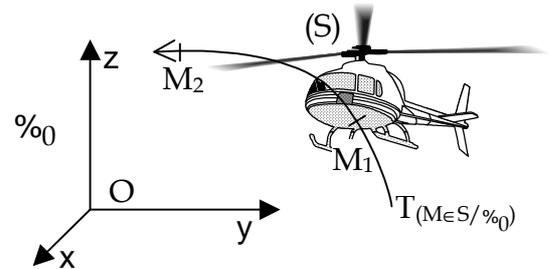
$$\text{Si } \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{R_0} \quad \text{Alors } \overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{R_0}$$

## 2. Accélération

### 2.1. Accélération tangentielle moyenne

Si le point M se situe en  $M_1$  à l'instant  $t_1$  et qu'il possède une vitesse instantanée  $v_1$  ; s'il passe à l'instant  $t_2$  en  $M_2$  à la vitesse  $v_2$ , son accélération tangentielle moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$  vaut :

$$a_t(t)_{\text{moy}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



L'accélération peut aussi être notée  $\Gamma(M \in S/R_0)$  ou  $\gamma(M \in S/R_0)$ .

### 2.2. Accélération tangentielle instantanée

A l'instant t quelconque, elle correspond à la limite du rapport  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} ; \quad \text{or } v(t) = \frac{ds}{dt} ; \quad \text{d'où } a_t(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

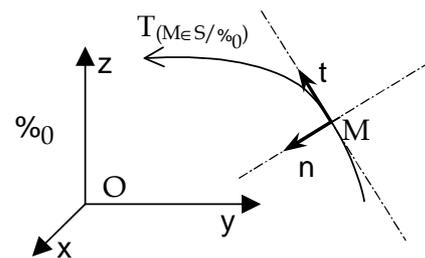
### 2.3. Vecteur accélération

$$\overrightarrow{a(M/R_0)} = \left( \frac{d\overrightarrow{V(M/R_0)}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{R_0}$$

Composantes tangentielles et normales de l'accélération :

Soient :

- $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal en M à la trajectoire  $T(M \in S/R_0)$ , orienté vers l'intérieur de la courbure ;
- $\vec{t}$  un vecteur unitaire tangent en M à  $T(M \in S/R_0)$ , orienté comme la trajectoire.



Dans cette base  $(\vec{n}, \vec{t})$ , l'accélération peut s'écrire :

$$\overrightarrow{a(M/R_0)} = a_n \cdot \vec{n} + a_t \cdot \vec{t}$$

avec :

- $a_n = \text{accélération normale} = \frac{v^2}{R}$  (R représente le rayon de courbure)
- $a_t = \text{accélération tangentielle} = \frac{dv}{dt}$

Autre expression possible :

$$\text{Si } \vec{V}(M \in S/R_0) \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{R_0} \quad \text{Alors } \vec{a}(M \in S/R_0) \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}_{R_0}$$

### 3. Cas du mouvement de translation rectiligne uniforme

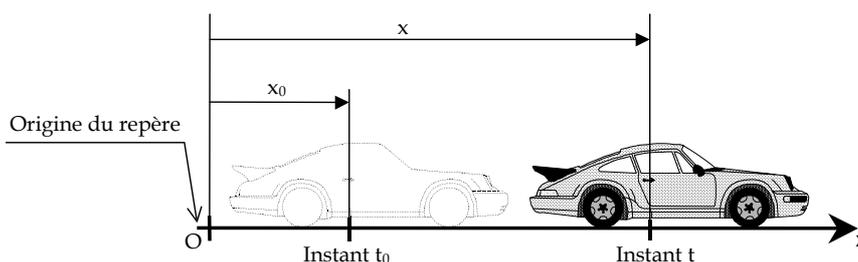
#### 3.1. Définition

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération ( $a=0$ ) et avec une vitesse constante au cours du temps. Il est noté M.T.R.U.

#### 3.2. Equations de mouvement

Soient :

- $t_i$  : instant initial, avec  $t_0 = 0$  ;
- $x_i$  : le déplacement initial, à  $t=t_i$  ;
- $v_i$  : la vitesse initiale ;
- $x$  : le déplacement à l'instant  $t$ .

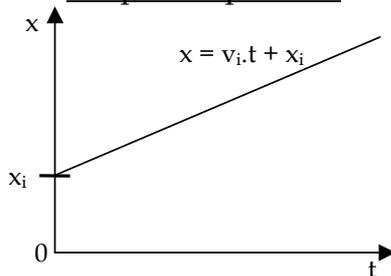


#### Equations horaires

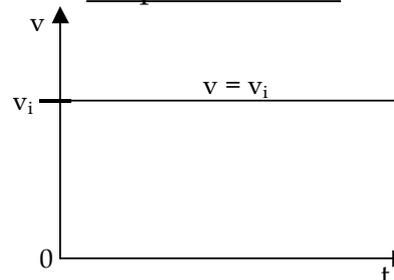
$$\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= v_i = \text{constante} \\ x &= v_i \cdot (t - t_i) + x_i \end{aligned}$$

$x_i$  et  $v_i$  sont les **conditions initiales** du mouvement.

#### Graphe de position



#### Graphe de vitesse



Par exemple :

Soit un M.T.R.U. entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  ;  
 $t_0 = 0$  et  $t_1 = 2$  secondes  
 $x_0 = 0$  m  
 $v_0 = 10$  m/s  
 $a = 0$  m/s<sup>2</sup>

#### Equations de mouvement :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= 10 \text{ m/s} \\ x &= v_0 \cdot (t - t_0) + x_0 = 10 \cdot t \end{aligned}$$

#### A l'instant $t_1$ :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ v_1 &= 10 \text{ m/s} \\ x_1 &= 10 \cdot t_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ m} \end{aligned}$$

### 4. Cas du mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré

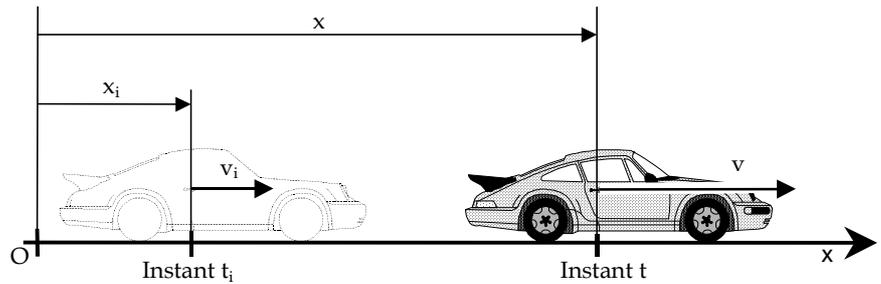
#### 4.1. Définition

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés ( $a>0$ ) ou décélérés ( $a<0$ ), l'accélération reste constante au cours du temps. Il est noté M.T.R.U.V.

4.2. Equations du mouvement

Soient :

- $t_i$  : instant initial, avec  $t_0 = 0$  ;
- $x_i$  : le déplacement initial, à  $t = t_i$  ;
- $a$  : l'accélération ;
- $v_i$  : la vitesse initiale ;
- $x$  : le déplacement à l'instant  $t$ .



Equations horaires

$$a = \text{constante}$$

$$v = a \cdot (t - t_i) + v_i$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_i)^2 + v_i \cdot (t - t_i) + x_i$$

$x_i$ ,  $v_i$  et  $a$  sont les **conditions initiales** du mouvement.

Par exemple :

**Soit un M.T.R.U.V. entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  ;**  
 $t_0 = 0$  et  $t_1 = 4$  secondes  
 $x_0 = 0$  m  
 $v_0 = 0$  m/s (départ arrêté)  
 $a = 3$  m/s<sup>2</sup>

**Equations de mouvement :**

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

$$v = a \cdot (t - t_0) + v_0 = 3 \cdot t$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x_0 = 1,5 \cdot t^2$$

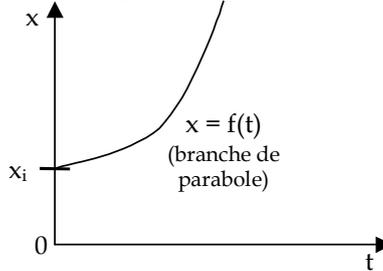
**A l'instant  $t = t_1$  :**

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

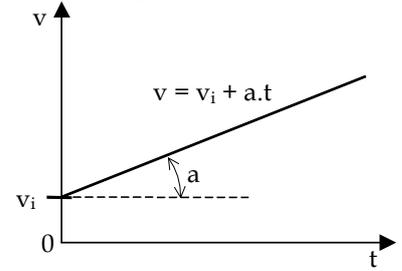
$$v_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \times 4 = 12 \text{ m/s}$$

$$x_1 = 1,5 \cdot t_1^2 = 1,5 \times 4^2 = 24 \text{ m}$$

Graphe de position



Graphe de vitesse

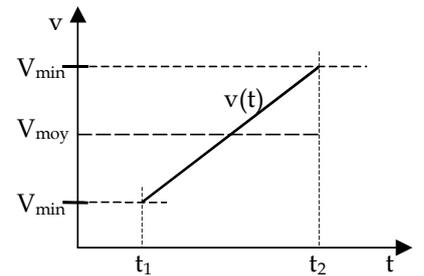


4.3. Calcul de la vitesse moyenne

Il est fréquent que lors de ce type de mouvement on connaisse la vitesse initiale et la vitesse finale (voir figure ci-contre).

Dans ce cas, le calcul de la vitesse moyenne est très simple :

$$V_{\text{moy}} = \frac{V_{\text{max}} + V_{\text{min}}}{2}$$

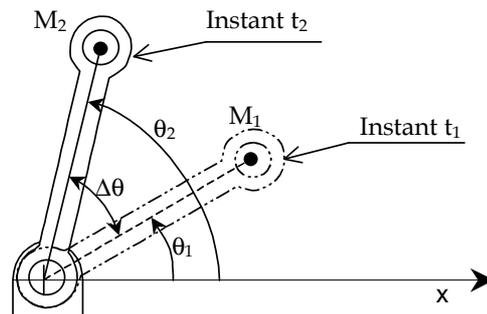


**5. Mouvement de rotation : généralités**

5.1. Rotation d'un solide

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire (tous les points de ce solide ont même vitesse angulaire).

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$$



5.2. Vitesse angulaire, ou vitesse de rotation  $\omega$

Vitesse angulaire moyenne :

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Vitesse angulaire instantanée :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \dot{\theta}$$

Remarque 1 :

1 tour =  $2\pi$  radian =  $360^\circ$

Remarque 2 :

Si N est la vitesse de rotation en tour/min, alors :  $\omega = \frac{\pi N}{30}$

5.3. Accélération angulaire  $\alpha$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega' = \dot{\omega} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'' = \ddot{\theta}$$

5.4. Vitesse d'un point

$$V_M = \omega \cdot OM = \omega \cdot r$$

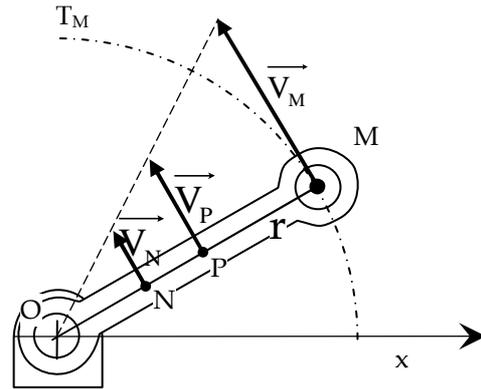
Remarque : puisque  $\omega$  a même valeur pour tous les points du solide, la vitesse linéaire  $\vec{V}(M \in S/R_0)$  varie linéairement avec la distance r à l'axe de rotation.

5.5. Accélération

$$\vec{a}_M = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a_t = \alpha \cdot r = \alpha \cdot OM$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{V_M^2}{r} = \omega \cdot V_M$$



**6. Cas du mouvement de rotation uniforme**

6.1. Définition

L'accélération angulaire  $\alpha$  est nulle. Ce mouvement est noté M.R.U.

6.2. Equations horaires de mouvement

Les équations horaires de mouvement sont :

$$\alpha = \theta'' = 0$$

$$\omega = \omega_i = \text{constante}$$

$$\theta = \omega \cdot (t - t_i) + \theta_i$$

$\omega_i$  et  $\theta_i$  sont les *conditions initiales* du mouvement.

**7. Mouvement de rotation uniformément varié**

7.1. Définition

L'accélération angulaire  $\alpha$  est constante. Ce mouvement est noté M.R.U.V.

7.2. Equations horaires de mouvement

Les équations horaires de mouvement sont :

$$\alpha = \text{constante}$$

$$\omega = \alpha \cdot (t - t_i) + \omega_i$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_i)^2 + \omega_i \cdot (t - t_i) + \theta_i$$

$\omega_i$  et  $\theta_i$  sont les *conditions initiales* du mouvement.

Remarque :

- Si  $\alpha > 0$ , il y a accélération du mouvement.
- Si  $\alpha < 0$ , il y a décélération du mouvement (ou freinage).